7ο μάθημα

$\boxed{9/12/19}$

Μη γραμμικά κύματα

Γραμμικοποίηση (Linearization)

ΠΑΡΑΔ.: Η εξίσωση Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = v\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v\in\mathbb{R}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$$

<u>Μορφή διατήρησης</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial x} - v\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2 - v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

$\exists$ μία διατηρήσιμη ποσότητα

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = c\in\mathbb{R}$$

Θέτουμε $u = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ (Παράδοξο... Θα δούμε γιατί) Τι γίνεται με συνοριακές συνθήκες?

άρα: $$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - v\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t} + \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - v\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

Θέτουμε $\psi = -2v\ln\varphi$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,(=u) = -2v\cdot\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2v\cdot\frac{\varphi_t}{\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2v\cdot\frac{\varphi_{xx}\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2}$$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση:

$$-2\nu\cdot\frac{\phi_t}{\phi} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\cdot 4\nu^2\cdot\frac{\phi_x^2}{\phi^2}}}_{2\nu^2\cdot\frac{\phi_x^2}{\phi^2}} + 2\nu^2\cdot\frac{\phi_{xx}\phi - \cancel{\phi_x^2}}{\phi^2} = 0$$

$$-2\nu^2\,\frac{\phi_x^2}{\phi^2}$$

$$\Rightarrow -2\nu\cdot\frac{\phi_t}{\phi} + 2\nu^2\cdot\frac{\phi_{xx}}{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_t = \nu\cdot\phi_{xx}}$$ Εξίσωση θερμότητας

$$\boxed{u = -2\nu\cdot\frac{\phi_x}{\phi}}$$ γραμμικοποιεί την εξίσ. Burgers! ονομάζεται μετασχ. Cole-Hopf

Συνοριακές - αρχικές συνθήκες:

Αρχική συνθήκη: $-2\nu\cdot\frac{\phi_x}{\phi} = f(x)$

$$\Rightarrow -2\nu\ln\phi = \int f(x)\,dx$$

Συνοριακές συνθήκες: $\phi, \phi_x \to 0$, $|x|\to\infty$

Τελικά λύνω το πρόβλημα $\phi_t = \nu\cdot\phi_{xx}$

$$\phi(0,x) = F(x)$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\phi(x,t) \to 0$$

Μετασχ. Fourier:

$$\mathcal{F}\{\phi_t\} = \nu\cdot\mathcal{F}\{\phi_{xx}\} = -k^2\nu\,\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}_t = -k^2\nu\hat{\phi} \quad \Rightarrow \hat{\phi} = c\cdot e^{-\nu k^2 t}$$

$$c = c(k) = \hat{\phi}(0,k) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ikx}\,dx = \hat{F}(k)$$

$$\hat{\phi} = \hat{F}\cdot e^{-\nu k^2 t}$$

Τελικά, $\phi(t,x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\phi}(t,k)e^{-ikx}\,dx =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F} \cdot e^{-\nu k^2 t - ikx} \, dk$$

$$\overset{\text{συνέλιξη}}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(x') \cdot e^{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}} \, dx'$$

$$u = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}$$

Τι γίνεται όταν $\nu \to \infty$?

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-x'}{t} \cdot F(x') \cdot e^{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}} \, dx'}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x') \cdot e^{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}} \, dx'}$$

Αλλάζω το χωρίο ολοκλήρωσης

$\phi_t = \nu \cdot \phi_{xx}$, $t \in [0, +\infty)$, $x \in [0, +\infty)$

Απαιτώ μικτή συνοριακή συνθήκη

$$a(t) \cdot u(0,t) + b(t) \cdot u_x(0,t) = g(t)$$

Στο άπειρο η λύση μηδενίζεται.

Μετασχηματισμός Laplace

Κατ' αναλογία με τον μετασχ. Fourier, ορίζω τον Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-sx} \, dx$$

$\mathcal{L}\{\phi_t\} = \nu \cdot \mathcal{L}\{\phi_{xx}\}$

$\Rightarrow \hat{\phi}_t = \nu s^2 \hat{\phi}$ + συνεισφορά από μηδέν

$$\int_0^{\infty} \phi'' e^{-sx} \, dx = \phi' e^{-sx} \Big|_0^{\infty} + s \cdot \int_0^{\infty} \phi' e^{-sx} \, dx$$

$$= \phi'(0) + s \cdot \left(\phi e^{-sx} \Big|_0^{\infty} + s \cdot \int_0^{\infty} \phi e^{-sx} \, dx \right)$$

$$= s^2 \hat{\phi}(s) + s\phi(0) - \phi'(0)$$

άρα $\hat{\phi}_t = \nu s^2\hat{\phi} + \nu s\phi(0) - \phi'(0)$

$$\phi_x(0,t) = -\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \cdot \int_0^t \frac{\phi_\tau(0,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\nu}} \cdot D_t^{1/2}\phi_0(t)$$

όπου $D_t^{1/2}\phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \frac{\phi_\tau(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau$ ονομάζεται ημίσια (μισή) παράγωγος

Hilbert transform

Δηλ. άλλαξα χωρίο κ. κατέρρευσαν τα πάντα

Η εξίσωση Korteweg - de Vries

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Γράφω την εξίσωση ως το σύστημα:

$$\boxed{v_{xx} + u\cdot v = \lambda v},\quad \lambda \in \mathbb{R} \implies Lv = \lambda v$$

$$v_t = (u_x + \gamma)v - (2u + 4\lambda)v_x \implies v_t = Mv$$

Ζευγάρι Lax (Lax pair)

άρα έχω το σύστημα:

$$\begin{cases} Lv = \lambda v \\ v_t = Mv \end{cases}$$

$L = L(x,t)$ τελεστής

περιέχει $u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t$

$$\implies \frac{\partial}{\partial t} Lv = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda v) \implies L_t v + L v_t = \lambda_t v + \lambda v_t$$

$$\Rightarrow L_t v + LMv = \lambda_t v + \lambda Mv$$
$$= \lambda_t v + M\lambda v$$
$$= \lambda_t v + M\underbrace{Lv}$$
$$\Rightarrow L_t v + (LMv - MLv) = \lambda_t v$$
$$\Rightarrow [L_t + (LM - ML)] \cdot v = \lambda_t v$$

Αν ζητήσω σταθ. ιδιοτιμές (στο χρόνο) κ για να αποφύγω τετριμμένη λύση

$$L_t + [L, M] = 0$$

όπου $[L, M] = LM - ML$ ο μεταθέτης

Επανερχόμαστε στην εξίσ. $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

Αναζητούμε λύσεις οδεύοντα κύματα

$\xi = x - ct$, τότε

$$-cu' + 6uu' + u''' = 0$$
$$\Rightarrow (-cu + 3u^2 + u'')' = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{u'' + 3u^2 - cu = A}$$

Αν αναζητήσω λύσεις που φθίνουν στα άπειρα

$A = 0$

$$u'' + 3u^2 - cu = 0 \quad \text{(αυτόνομη εξίσωση)}$$
$$\Rightarrow u''u' + 3u^2u' - cuu' = 0$$
$$\Rightarrow \frac{(u')^2}{2} + \frac{3u^3}{3} - \frac{cu^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(u')^2 = cu^2 - 2u^3}$$

$$\Rightarrow u = \pm\sqrt{cu^2 - 2u^3} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{cu^2 - 2u^3}} = \pm d\xi$$

$$u(\xi) = u(x - ct) = -\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - x_0)\right)$$

$t = 0 \Rightarrow$ αρχικό $u \Rightarrow v(0, x)$ παίρνω εξίσωση

$\Downarrow$ κάτω εξίσ.

$$u(t, x) \Leftarrow v(t, x)$$

Λύσεις ονομάζονται σολιτόνια της KdV

Λύσεις ομοιότητας : Αναζητούμε λύσεις της μορφής $u = t^m f(z)$, $z = x t^n \to x = \frac{z}{t^n}$

Έστω η εξίσωση : $u_t + u u_x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m t^{m-1} f + t^m f' \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= m t^{m-1} f + t^m n t^{n-1} x f'$$

$$= m t^{m-1} f + n t^{m+n-1} x f'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^m f' \frac{\partial z}{\partial x} = t^{m+n} f'$$

$$u_t + u u_x = m t^{m-1} f + n t^{m+n-1} x f' + t^{2m+n} f f' = 0$$

$$\Rightarrow m t^{n-1} f + n t^{m-1} z f' + t^{2m-1} f f' = 0$$

$$\Rightarrow m f + n t^{m-n-2} f' z + t^{2m-n-2} f f' = 0$$

Θέλω $m - n - 2 = 0$

$$m = n + 2$$

άρα $(n+2) f + n f' + t^m f f' = 0$

$m = 0 \Rightarrow \cancel{(n+2)} f + n f' + f f' = 0$

$n = -2$: $f f' - 2 f' = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = 2 \\ f' = 0 \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow f = z + A$$

$$= x t^{-2}$$

$$= \frac{x}{t^2} + A$$